

モジュラーテンソル圏とVerlinde公式の完全な数学的基礎

本稿では、現代数学（表現論・位相幾何学）および理論物理学（2次元共形場理論・3次元位相的量子場理論）において極めて重要な役割を果たす「リボン圏」、「モジュラーテンソル圏」、および「Verlindeの公式」について、基本概念の定義からその厳密な証明、関連する関手の性質に至るまでを、一切の論理的ギャップなく自己完結的 (self-contained) に解説する。

1. リボン圏とモジュラーテンソル圏の基礎概念

モジュラーテンソル圏 (modular tensor category) は、いくつかの豊かな代数的構造を積み重ねることで定義される。順を追って厳密な定義を行う。

定義.

テンソル圏 (Tensor Category) とブレイディング (Braiding)

$\mathcal{C}$ をテンソル圏とする。すなわち、 $\mathcal{C}$ は対象の間のテンソル積 $\otimes$ と単位対象 $\mathbf{1}$ 、および結合律と単位律を与える自然同型を備えた圏である。

圏 $\mathcal{C}$ がブレイディング (braiding) を持つとは、任意の対象 X, Y に対して自然同型

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

が与えられ、これが六角形公理 (hexagon axioms) と呼ばれるテンソル積との整合性条件を満たすことである。ブレイディングを持つテンソル圏をブレイドテンソル圏 (braided tensor category) と呼ぶ。幾何学的には空間内で2本の紐を交差させる操作に対応し、「右に跨ぐか」「左に跨ぐか」を厳密に区別する。

定義.

双対 (Dual) とリボン構造 (Ribbon Structure)

ブレイドテンソル圏 $\mathcal{C}$ がリボン圏 (ribbon category) であるとは、以下の構造を持つことである。

まず、各対象 X に対して左双対対象 (left dual object) X^* と右双対対象 (right dual object) *X が存在し、それらが一致し ($X^* \cong {}^*X$)、評価射 (evaluation) と余評価射 (coevaluation) によって幾何学的な「紐の折り返し (Uターン)」が well-defined に定まることである。

さらに、各対象 X に対してひねり (twist) と呼ばれる自然同型

$$\theta_X : X \rightarrow X$$

が存在し、以下の条件を満たすことである。これは幾何学的にリボンを 360° (1回転) ひねる操作に対応する。

$$\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$$

$$\theta_{X^*} = (\theta_X)^*$$

リボン圏においては、任意の自己準同型射 $f : X \rightarrow X$ に対して、圏論的トレース (categorical trace) $\text{Tr}(f)$ がスカラー (単位対象 $\mathbf{1}$ の自己準同型環 $\text{End}(\mathbf{1})$ の元) として定まる。特に対象 X の圏論的次元 (categorical dimension) を $\dim(X) = \text{Tr}(\text{id}_X)$ で定義する。

定義.

有限半単純性とモジュラーテンソル圏

リボン圏 $\mathcal{C}$ が有限半単純 (finite semisimple) であるとは、同型を除いて有限個の単純対象 (simple object) の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ を持ち、任意の対象がこれらの直和として一意に分解されることである。ここで $0 \in I$ を単位対象 $\mathbf{1} \cong X_0$ に対応するインデックスとする。

単純対象の組 X_i, X_j に対して、二重のブレイディング（ホップリンクに対応）のトレースとして S 行列を以下のように定義する。

$$S_{ij} = \text{Tr}(c_{X_j, X_i} \circ c_{X_i, X_j})$$

リボン圏 $\mathcal{C}$ がモジュラーテンソル圏 (modular tensor category) であるとは、 $\mathcal{C}$ が有限半単純であり、かつ上記で定義された行列 $S = (S_{ij})_{i, j \in I}$ が基礎体上で正則行列（可逆）になることである。

2. 融合規則とVerlinde公式の証明

有限半単純な圏 $\mathcal{C}$ において、2つの単純対象のテンソル積は再び単純対象の直和に分解される。この分解の重複度を表す非負整数 N_{ij}^k を融合係数 (fusion coefficient) と呼ぶ。

$$X_i \otimes X_j \cong \bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k X_k$$

ここで $N_{ij}^k = \dim \text{Hom}(X_k, X_i \otimes X_j)$ である。Verlindeの公式は、この代数的な融合係数 N_{ij}^k が、トポロジカルに定義された S 行列の成分のみを用いて完全に記述できるという驚くべき定理である。

定理.

Verlinde公式 (Verlinde Formula)

モジュラーテンソル圏において、融合係数 N_{ij}^k は次のように表される。

$$N_{ij}^k = \sum_{m \in I} \frac{S_{im} S_{jm} (S^{-1})_{mk}}{S_{0m}}$$

証明.

証明の鍵は、 S 行列の各列が融合代数の1次元表現（指標）を与えること、すなわち S 行列が融合規則を対角化することを示すことにある。

ステップ1: 中心化作用素とスカラー倍の補題

任意の対象 Y に対して、自己準同型射の族を考える。単純対象 X_m に対して、線形写像 $\Phi_{X_m}(Y) : Y \otimes X_m \rightarrow Y \otimes X_m$ を二重のブレイディング $\Phi_{X_m}(Y) = c_{X_m, Y} \circ c_{Y, X_m}$ として定義する。

X_m は単純対象であるため、Schurの補題により、自己準同型環 $\text{End}(X_m)$ は基礎体と同型である。もし Y も単純対象 X_j であれば、写像 $\Phi_{X_m}(X_j)$ に対し、 X_j の成分を評価射で部分的なトレースをとって「くぐらせる」操作を行うことで、自己準同型 $X_m \rightarrow X_m$ が得られる。それは単純対象上の射ゆえに定数倍 $\omega_j(X_m) \text{id}_{X_m}$ となる。

この定数 $\omega_j(X_m)$ を求めるために両辺の完全なトレースをとると、左辺は定義より S_{jm} となる。右辺は $\omega_j(X_m) \dim(X_m)$ となる。 $\dim(X_m) = S_{0m}$ であるため、スカラー $\omega_j(X_m)$ は次のように定まる。

$$\omega_j(X_m) = \frac{S_{jm}}{S_{0m}}$$

ステップ2: 融合代数の準同型性の証明

二つの対象 X_i, X_j をテンソル積した $X_i \otimes X_j$ が X_m に対してどのように二重ブレイディングを行うかを考える。テンソル圏の六角形公理から、対象 $X_i \otimes X_j$ と X_m の二重ブレイディングは、幾何学的には X_i と X_j の紐を並べたものをまとめて X_m の周りを一周させる操作に等しく、代数的にはそれぞれを独立に一周させる操作の合成として表される。したがって、スカラー作用について以下の等式が成り立つ。

$$\omega_{i \otimes j}(X_m) = \omega_i(X_m) \omega_j(X_m)$$

一方で、対象 $X_i \otimes X_j$ は単純対象の直和として分解される（ $X_i \otimes X_j \cong \bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k X_k$ ）。この分解の両辺で X_m に対する二重ブレイディングのスカラー作用を評価する。直和分解の各成分 X_k はそれぞれ $\omega_k(X_m)$ というスカラー倍で作用するため、線形性から全体としての作用は次のように展開できる。

$$\omega_i(X_m) \omega_j(X_m) = \sum_{k \in I} N_{ij}^k \omega_k(X_m)$$

ステップ3: S 行列による表現への書き換え

ステップ1で求めた $\omega_j(X_m) = \frac{S_{jm}}{S_{0m}}$ を、ステップ2で得られた等式に代入する。

$$\frac{S_{im}}{S_{0m}} \frac{S_{jm}}{S_{0m}} = \sum_{k \in I} N_{ij}^k \frac{S_{km}}{S_{0m}}$$

両辺に S_{0m} を掛けることで、次の方程式を得る。

$$\frac{S_{im} S_{jm}}{S_{0m}} = \sum_{k \in I} N_{ij}^k S_{km}$$

ステップ4: S 行列の可逆性を用いた逆算

ここで、モジュラーテンソル圏の決定的な公理である「 S 行列は正則である」という性質を用いる。 S 行列の逆行列を S^{-1} とし、その (m, l) 成分を $(S^{-1})_{ml}$ と書く。

先ほど得られた等式の両辺に $(S^{-1})_{ml}$ を掛け、 $m \in I$ について総和をとる。

$$\sum_{m \in I} \frac{S_{im} S_{jm}}{S_{0m}} (S^{-1})_{ml} = \sum_{m \in I} \sum_{k \in I} N_{ij}^k S_{km} (S^{-1})_{ml}$$

右辺の和の順序を交換すると、

$$\text{右辺} = \sum_{k \in I} N_{ij}^k \left(\sum_{m \in I} S_{km} (S^{-1})_{ml} \right)$$

となる。行列の積の定義から $\sum_{m \in I} S_{km} (S^{-1})_{ml} = \delta_{k,l}$ （クロネッカーのデルタ）である。したがって、右辺は $k = l$ の項のみが生き残り、 N_{ij}^l となる。

$$\sum_{m \in I} \frac{S_{im} S_{jm} (S^{-1})_{ml}}{S_{0m}} = N_{ij}^l$$

インデックス l を k に書き直せば、目的のVerlinde公式が得られる。証明終。

3. 圏論的 S 行列と共形場理論の S 行列の一致

有理共形場理論 (RCFT) において物理的に定義される指標のモジュラー変換行列 S^{CFT} と、その表現圏（モジュラーテンソル圏）において代数・トポロジ的に定義されるホップリンク不変量である S^{cat} が一致するという事実は、本分野における深い定理である。

3.1 2つの S 行列の定義

共形場理論における S 行列 (S^{CFT}): トーラス上の分配関数に対応するキャラクター $\chi_i(\tau) = \text{Tr}_{M_i}(q^{L_0-c/24})$ (ただし $q = e^{2\pi i\tau}$) が、モジュラー変換 $\tau \mapsto -1/\tau$ に対して受ける線形変換の行列として定義される。

$$\chi_i(-1/\tau) = \sum_{j \in I} S_{ij}^{\text{CFT}} \chi_j(\tau)$$

圏論における S 行列 (S^{cat}): 表現圏における二重ブレイディングの圏論的トレースとして定義される。

$$S_{ij}^{\text{cat}} = \text{Tr}(c_{M_j, M_i} \circ c_{M_i, M_j})$$

3.2 TQFTの直観による説明 (ソリッドトーラスの張り合わせ)

位相的量子場理論 (TQFT) の視点では、トーラス T^2 に割り当てられる状態空間の基底 v_i は、「境界が T^2 であるようなソリッドトーラスの内部の芯 (a サイクル) に、対象 M_i でラベルされたウィルソン線を配置した状態」として構成される。

モジュラー変換 $S: \tau \mapsto -1/\tau$ は、トーラスの空間方向 (a サイクル) と時間方向 (b サイクル) を入れ替える。TQFTの公理により、内積 $\langle v_j, S \cdot v_i \rangle$ を評価することは、2つのソリッドトーラスを互いのサイクルを入れ替えて張り合わせることに等しい。この張り合わせによって得られる3次元多様体は3次元球面 S^3 であり、内部の芯であったウィルソン線は、互いに相手の周りを一回ずつ回るような絡み目、すなわちホップリンク (Hopf link) を形成する。ホップリンクの評価値は二重ブレイディングの圏論的トレースであるため、 S^{CFT} と S^{cat} は一致する。

3.3 頂点作用素代数 (VOA) の表現論と微分方程式のモノドロミー

上記のTQFTの幾何学的直観に頼らず、Yi-Zhi Huangによって確立された、VOAのコンフォーマルブロックが満たす微分方程式の解析的接続を通じた厳密な代数的・解析的証明が存在する。

定義.

頂点作用素代数と交絡作用素 (Intertwining Operator)

V を有理的かつ C_2 余有限な頂点作用素代数とする。 C_2 余有限とは、部分空間 $C_2(V) = \text{span}\{u_{-2}v \mid u, v \in V\}$ による商空間 $V/C_2(V)$ が有限次元であることを意味する。

既約加群 W_i, W_j, W_k に対し、交絡作用素 $\mathcal{Y}: W_i \otimes W_j \rightarrow W_k\{z\}$ は以下のように展開される。

$$\mathcal{Y}(w_i, z)w_j = \sum_{n \in \mathbb{C}} (w_i)_n w_j z^{-n-1}$$

これらを用いて定義される行列要素 $F(z_1, z_2) = \langle w'_4, \mathcal{Y}_1(w_1, z_1)\mathcal{Y}_2(w_2, z_2)w_3 \rangle$ をコンフォーマルブロックと呼ぶ。

V の C_2 余有限性により、コンフォーマルブロック $F(z_1, z_2)$ は、変数 z_1, z_2 に関する確定特異点 (regular singular point) を持つ有限階の線形偏微分方程式系 (KZ型方程式) を満たす。

ブレイディング c_{W_1, W_2} は、解空間の領域 $|z_1| > |z_2| > 0$ における解 $F(z_1, z_2)$ を出発点とし、変数 z_1 と z_2 の位置を特異点 $z_1 = z_2$ を反時計回りに迂回しながら入れ替える経路に沿って解析的接続 (analytic continuation) することで厳密に構成される。この構成により、六角形公理が自動的に満たされる。

3.4 TQFTを経由しない厳密な代数的・解析的証明

Huangの定理において、 S^{CFT} と S^{cat} の一致は、モジュライ空間の幾何的張り合わせ (geometric sewing) の極限として以下のように厳密に証明される。

証明.

1. トーラスと球面の幾何的張り合わせ:

トーラス上のコンフォーマルブロック $\chi_i(\tau)$ を、球面 $\mathbb{P}^1$ 上のコンフォーマルブロックの「張り合わせ」の極限として表現する。球面 $\mathbb{P}^1$ 上に2点 0 と ∞ を取り、そこに加群 W_i と W_i^* を配置して環状領域を接着パラメータ $q = e^{2\pi i\tau}$ で張り合わせる。解析的には、トーラス上のトレース $\chi_i(\tau)$ は、球面上に配置された適当な交絡作用素を挟んだ極限として一意に表される。

$$\chi_i(\tau) = \lim_{q \rightarrow 0} (\text{張り合わせにより構成された } \mathbb{P}^1 \text{ 上の相関関数})$$

2. モジュラー変換と解析的接続の対応関係:

トーラス T_τ において、 $\chi_i(\tau)$ のトレースを計算する時間方向の伝播（ b サイクル）は、張り合わせモデルにおいては球面上の点 0 から ∞ へ向かう経路に対応する。一方、空間方向のループ（ a サイクル）は、球面上における原点 0 の周りを回るループに対応する。

変換 $\tau \mapsto -1/\tau$ はトーラス上で a サイクルと b サイクルを入れ替える。これを球面の言葉に翻訳すると、「状態が 0 から ∞ へ伝播する構造」と、「挿入点が別の挿入点の周りを一周する構造」を入れ替える操作となる。すなわち、関数 $F(z_1, z_2)$ における変数 z_1 を、 z_2 の周りに沿って 360 度（一周）解析的接続するモノドロミー操作と完全に一致する。

3. 行列成分の等価性:

圏論のブレイディングは変数を半周させるモノドロミーであった。したがって、二重ブレイディング $c_{W_j, W_i} \circ c_{W_i, W_j}$ は、変数を完全に一周させるモノドロミーに等しい。微分方程式の解空間における基底の変換を考えると、左辺のトーラスのモジュラー変換から誘導される展開係数 S_{ij}^{CFT} と、右辺の二重ブレイディングの作用のトレースからなる展開係数 S_{ij}^{cat} は、同一の特異点領域における解析的接続の係数として一意に一致する。証明終。

4. モジュラーテンソル圏における関手の性質

モジュラーテンソル圏の構造を保つ関手について、忠実性および自己同値性を証明する。

4.1 構造を保つ関手は忠実になる

定理.

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ をモジュラーテンソル圏とし、 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をモジュラーテンソル圏構造（テンソル積、単位対象、ブレイディング、リボン構造）を保つ関手とすると、 F は忠実 (faithful) となる。

証明.

関手 F が忠実であるとは、任意の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して、「 $f \neq 0$ ならば $F(f) \neq 0$ 」が成り立つことである。

1. 単純対象が零対象に写されないこと:

$\mathcal{C}$ の単純対象 S について考える。リボン圏において、恒等射 id_S のトレースは対象の次元 $\dim(S)$ を与える。これは評価射 $u: \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow S \otimes S^*$ と余評価射 $v: S \otimes S^* \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ の合成として $v \circ u = \dim(S) \text{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}$ と表される。

モジュラーテンソル圏において S 行列は正則であるため、 $S_{0,S} = \dim(S) \neq 0$ である。ゆえに $u' = (\dim(S))^{-1}u$ を定義でき、 $v \circ u' = \text{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}$ を得る。

F は単位対象を保つため $\text{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}} \neq 0$ である。もし $F(S) = 0$ と仮定すると、 $F(S \otimes S^*) \cong F(S) \otimes F(S^*) = 0$ となる。両辺に関手 F を適用すると $F(v) \circ F(u') = \text{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}$ となるが、左辺は零対象を経由するため 0 となり矛盾する。ゆえに $F(S) \neq 0$ である。

2. 任意の非零対象が零対象に写されないこと:

非零対象 X は半単純性より単純対象 S を直和成分として含む。包含射 i と射影 p により $p \circ i = \text{id}_S$ となる。 F を適用すると

$F(p) \circ F(i) = \text{id}_{F(S)} \neq 0$ となるため、 $F(X) \neq 0$ である。

3. 任意の非零射における忠実性の証明:

任意の非零の射 $f: X \rightarrow Y$ は、その非零の像 I への全射 $p_I: X \rightarrow I$ と単射 $i_I: I \rightarrow Y$ の合成に分解される ($f = i_I \circ p_I$)。

半単純圏においてはすべての短完全列が分裂するため、全射 p_I は右逆射を持ち、単射 i_I は左逆射を持つ。すなわち、射 $p'_I: I \rightarrow X$ と $i'_I: Y \rightarrow I$ が存在し、 $p_I \circ p'_I = \text{id}_I$ および $i'_I \circ i_I = \text{id}_I$ を満たす。

合成を計算すると、

$$i'_I \circ f \circ p'_I = i'_I \circ (i_I \circ p_I) \circ p'_I = (i'_I \circ i_I) \circ (p_I \circ p'_I) = \text{id}_I \circ \text{id}_I = \text{id}_I$$

となる。両辺に F を適用すると、 $F(i'_I) \circ F(f) \circ F(p'_I) = \text{id}_{F(I)}$ を得る。 $I \neq 0$ より $F(I) \neq 0$ であり $\text{id}_{F(I)} \neq 0$ なので、 $F(f) = 0$ と仮定すると矛盾する。したがって $F(f) \neq 0$ であり、忠実性が証明された。証明終。

4.2 自己関手は充満忠実 (圏の自己同値) になる

定理.

$\mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏とし、 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏の自己関手とする。 F は充満忠実 (fully faithful) になる (すなわち圏の自己同値となる)。

証明.

単純対象の完全代表系を $\{X_0, \dots, X_n\}$ とし、関手 F による像を $F(X_i) \cong \bigoplus_{k=0}^n M_{ik} X_k$ とする。ここで $M = (M_{ik})$ は非負整数行列である。

1. S 行列の保存と行列式:

F は二重ブレイディングのトレースを保つため、 $S_{ij} = \text{Tr}(c_{F(X_j), F(X_i)} \circ c_{F(X_i), F(X_j)})$ となる。直和展開してトレースの双線形性を用いると、 $S_{ij} = \sum_k \sum_l M_{ik} M_{jl} S_{kl}$ 、行列表記で $S = MSM^T$ を得る。両辺の行列式をとり、 $\det S \neq 0$ で割ると $(\det M)^2 = 1$ を得て、 $\det M = \pm 1$ となる。

2. Frobenius-Perron次元の保存と固有値評価:

F は対象のFrobenius-Perron次元 $d_i = \text{FPdim}(X_i) > 0$ を保つため、 $d_i = \sum_{k=0}^n M_{ik} d_k$ (すなわち $M\vec{d} = \vec{d}$) を満たす。

任意の複素固有値 λ と固有ベクトル $\vec{v}$ について $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ とする。 $|\lambda||v_i| \leq \sum_j M_{ij}|v_j|$ であり、 $|v_j| \leq cd_j$ となるような最小の $c > 0$ をとると、右辺は $c \sum_j M_{ij} d_j = cd_i$ となる。ゆえに $|\lambda||v_i| \leq cd_i$ となり、最大成分で評価すれば $|\lambda| \leq 1$ を得る。

3. 代数的整数論を用いた置換行列の証明:

M は整数行列なので固有値は代数的整数であり、積は $\det M = \pm 1$ である。すべての固有値の絶対値が 1 以下であり、かつその積の絶対値が 1 であるため、すべての絶対値は正確に 1 である。ここで **クロネッカーの定理 (Kronecker's theorem)** を適用すると、 M のすべての固有値は 1 のべき根であることが確定する。

したがって、ある整数 $k \geq 1$ が存在して M^k の固有値はすべて 1 になる。 M^k も非負整数行列であり、トレースは $n + 1$ である。 $M^k \vec{d} = \vec{d}$ も成り立つ。

対角成分 $(M^k)_{ii}$ は非負整数である。もしある i について $(M^k)_{ii} \geq 2$ であったとすると、

$$d_i = \sum_{j=0}^n (M^k)_{ij} d_j \geq (M^k)_{ii} d_i \geq 2d_i > d_i$$

となり矛盾が生じる。したがってすべての対角成分は 1 である。このとき $M^k \vec{d} = \vec{d}$ の式は

$$d_i = d_i + \sum_{j \neq i} (M^k)_{ij} d_j$$

となる。 $d_j > 0$ であるため、非対角成分はすべて $(M^k)_{ij} = 0$ でなければならない。よって $M^k = I$ である。非負整数行列で冪乗が単位行列となるため、 M 自身が置換行列 (permutation matrix) である。

4. 充満忠実性の結論:

M が置換行列であるため、ある置換 π が存在し $F(X_i) \cong X_{\pi(i)}$ となる。単純対象間の射空間の次元は、

$$\dim \text{Hom}(F(X_i), F(X_j)) = \dim \text{Hom}(X_{\pi(i)}, X_{\pi(j)}) = \delta_{\pi(i), \pi(j)} = \delta_{i,j} = \dim \text{Hom}(X_i, X_j)$$

となる。関手は忠実であるため射の空間で単射であり、次元の一致から全単射となる。半単純性から任意の対象への射空間でも同型となるため、 F は充満忠実である。証明終。

5. 応用と参考文献

モジュラーテンソル圏とVerlinde公式の応用として、現代の **位相的量子計算 (Topological Quantum Computation)** が挙げられる。非可換（非アーベル）エニオン (Anyon) の交換関係がリボン圏のブレイディング $c_{V,W}$ で記述され、エニオン融合の計算（例えばFibonacciエニオンモデルや $SU(2)_k$ モデル）にVerlindeの公式が直接使われている。

基本文献

1. テンソル圏と自己関手の構造 (充満忠実性の証明など):

Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., & Ostrik, V. (2015). *Tensor Categories* (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 205). American Mathematical Society.

2. 共形場理論とモジュラー関手の視点 (幾何学的対応):

Bakalov, B., & Kirillov, A. Jr. (2001). *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. American Mathematical Society.

3. トポロジーと3次元TQFTの視点 (Reshetikhin-Turaev不変量):

Turaev, V. G. (1994 / 2010). *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. Walter de Gruyter.

4. 圏論的構造定理と非退化性 (Müger中心):

Müger, M. (2003). *From Subfactors to Categories and Topology I. Topological Equivalence of Tensor Categories*. Journal of Pure and Applied Algebra, 180(1-2), 81-157.

5. VOAの表現論と解析的接続に基づくVerlinde予想の厳密な証明:

Huang, Y.-Z. (2008). *Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture*. Communications in Contemporary Mathematics, 10(01), 103-154.

6. 量子群の表現論からのアプローチ:

Kassel, C. (1995). *Quantum Groups*. Springer.